Act23 : Applications avec outil de calcul

1 On sait que $\sin(x) = \sum_{n\geq 0} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ (convergence $\forall x \in \mathbb{R}$)

on choisit $n=7$ et $x = \frac{\pi}{16}$ ($n=7$ est le degré du polynôme considéré) :

$$\sin\left(\frac{\pi}{16}\right) \cong \underbrace{\frac{\pi}{16} - \left(\frac{\pi}{16}\right)^3 \cdot \frac{1}{3!} + \left(\frac{\pi}{16}\right)^5 \cdot \frac{1}{5!} - \left(\frac{\pi}{16}\right)^7 \cdot \frac{1}{7!}}_{\cong 0{,}19509032 \text{ (geogebra)}} = P_7(x)$$

Erreur ? $|R_7(x)| < \left[\max_{t\in[0;x]} \left|\sin^{(8)}(t)\right|\right] \cdot \frac{x^8}{8!} < \frac{x^8}{8!}$

pour $x = \frac{\pi}{16}$: $\left|R_7\left(\frac{\pi}{16}\right)\right| < \frac{\pi^8}{16^8 \cdot 8!} \cong 10^{-10}$ Geogebra donne :

$\underbrace{0{,}00000000000}_{\#=11}1135$

Remarque : la calculatrice donne $\sin\left(\frac{\pi}{16}\right) \cong 0{,}195090322$

Geogebra donne $\sin\left(\frac{\pi}{16}\right) \cong 0{,}195090322$

2 $\sin(1) = P_n(1) + R_n(1)$, avec $|R_n(1)| < \left[\max_{t\in[0;1]} \left(\sin^{(n+1)}(t)\right)\right] \cdot \frac{|1-0|^{n+1}}{(n+1)!}$

$< \frac{1}{(n+1)!}$

on veut $|R_n(1)| < 2 \cdot 10^{-6}$

on doit avoir $\frac{1}{(n+1)!} = 2 \cdot 10^{-6} \Leftrightarrow (n+1)! = \frac{10^6}{2}$

$= 500000$

et on a : $9! = 362'880$

$10! = 3'628'800$ donc $n = 10$

le polynôme est $P_{10}(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} = P_9(x)$

3 $\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}$ $\forall x \in]-1;1]$; on choisit $n=10$:

donc $\ln(1{,}5) = P_{10}(0{,}5) + R_{10}(0{,}5)$

avec $P_{10}(0{,}5) = \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \frac{1}{3} - \ldots - \left(\frac{1}{2}\right)^{10} \cdot \frac{1}{10} \cong 0{,}4054346 4029$

Geogebra

Geogebra : $E_{10}(0{,}5) = 0{,}0000304603$

$\boxed{4}$ $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ $(\forall x \in \mathbb{R})$; on choisit $n=4$:

$e^x = P_4(x) + R_4(x) = \frac{65}{24} + R_4(x) = 2{,}708\overline{3} + R_4(x)$

en $x=1$: $e = P_4(1) + R_4(1)$

avec $|R_4(1)| < \left(\underset{t\in[0;1]}{\operatorname{Max}} (e^t)^{(5)}\right) \frac{(1-0)^5}{5!} \leq e \cdot \frac{1}{120} \cong 0{,}02265\ldots$

l'erreur est fortement majorée car en fait
elle ne vaut "que" $R_4(1) = e - P_4(1) \underset{calc}{\cong} 0{,}009948$

Act 24 Dériver, intégrer

$\boxed{1}$ On sait que $\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}$ et donc que $\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \arctan(x) + C$

Egalement que $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$ $\forall x$ tel que $|x|<1$
(serie géométrique)

on pose $y = -x$:

$\frac{1}{1+y} = 1 - y + y^2 - y^3 + \ldots + (-1)^n y^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n y^n$ $\forall |y|<1$

puis $y = z^2$:

$\frac{1}{1+z^2} = 1 - z^2 + z^4 - z^6 + \ldots + (-1)^n z^{2n} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^{2n}$ $\forall |z|<1$

On intègre : $\int \frac{1}{1+z^2}\,dz = \int \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^{2n}\,dz = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \int z^{2n}\,dz$

c'est un thm [non démontré] : on peut ici intégrer terme à terme dans une somme également infinie

$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{2n+1}$ qui par ailleurs vaut $\arctan(z)$

Rem : on peut vérifier la convergence :

- $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{z^{2n+3}}{2n+3} \cdot \frac{2n+1}{z^{2n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty} |z|^2 \left(\frac{2n+1}{2n+3}\right) = |z^2| \cdot 1 = |z^2|$

donc la série converge pour $|z|<1$ et diverge pour $|z|>1$

- en $x=-1$: $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(-1)}{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{2n+1}$: converge [déjà vu]

- en $x=1$: $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \cdot \frac{1}{2n+1}$ converge aussi (on peut justifier qu'elle converge bien vers arctan(1) ; non demandé ici)

On pose alors $x=1$ et on obtient :

$$\frac{\pi}{4} = \arctan(1) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{2n+1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \dots$$

Remarque : la convergence est lente

cf Geogebra : Somme$((-1)^n \cdot \frac{1}{2n+1}, n, 0, 100)$ donne 0,78787855

alors que $\arctan(1) \cong 0,785398$

Pour π : $4 \cdot$ Somme$((-1)^n \frac{1}{2n+1}, n, 0, 100)$ donne 3,2323158

$\boxed{2}$ Pour $\exp(x) = e^x$, on a : $P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$

On pose $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$; a-t-on bien $f(x) = e^x$?

Dérivons terme-à-terme [c'est un thm qui le permet, non démontré ici] :

$$f'(x) = \left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}\right]' = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{x^k}{k!}\right)' = \dots$$

càd : $\left[1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^k}{k!} + \dots\right]' = 1' + x' + \left(\frac{x^2}{2!}\right)' + \dots + \left(\frac{x^n}{n!}\right)' + \dots$

$$= 0 + 1 + \frac{2x}{2!} + \frac{3x^2}{3!} + \dots + \frac{nx^{n-1}}{n!} + \dots$$

$$= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{x^n}{n!} + \dots$$

On a donc que $f'(x) = f(x)$

on pose $y = f(x)$ et on obtient : $y' = y$ } c'est une équation différentielle

on la résout par séparation des variables, en écrivant $y' = \frac{dy}{dx}$:

$$\frac{dy}{dx} = y \Leftrightarrow \frac{dy}{y} = dx \Leftrightarrow \int \frac{1}{y} dy = \int 1 \cdot dx \Leftrightarrow \ln|y| = x + c$$

$$\Leftrightarrow |y| = e^{x+c} = e^c \cdot e^x \Leftrightarrow y = \underbrace{\pm e^c}_{k} e^x \Leftrightarrow y = ke^x$$

on sait que $f(0) = 1 + 0 + \frac{0^2}{2!} + \dots = 1$, donc : $1 = ke^0 \Leftrightarrow k = 1$

et on a bien : $f(x) = e^x$

$\boxed{3}$ (a) $f(x) = \dfrac{\sin(x)}{x} = \dfrac{\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}}{x} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \dfrac{x^{2n}}{(2n+1)!}$

donc $\displaystyle\int_0^{1/2} \frac{\sin(x)}{x}\,dx = \int_0^{1/2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n+1)!}\,dx = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{(2n+1)!}\int_0^{1/2} x^{2n}\,dx$

$\displaystyle = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{(2n+1)!}\,\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\Big|_0^{1/2} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{(2n+1)!\,(2n+1)}\left(\frac{1}{2}\right)^{2n+1}$

On peut aussi directement partir avec une valeur de n, par ex $n=7$:

pour sinus : $P_7(x) = x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} - \dfrac{x^7}{7!}$ approxime $\sin(x)$

d'où $\dfrac{\sin(x)}{x} \sim 1 - \dfrac{x^2}{3!} + \dfrac{x^4}{5!} - \dfrac{x^6}{7!}$

$\displaystyle\int_0^{1/2} \frac{\sin(x)}{x}\,dx \sim x - \frac{x^3}{3\cdot 3!} + \frac{x^5}{5\cdot 5!} - \frac{x^7}{7\cdot 7!}\Big|_0^{1/2}$

$\displaystyle\int_0^{1/2} \frac{\sin(x)}{x}\,dx \sim \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2}\right)^3\frac{1}{3\cdot 3!} + \left(\frac{1}{2}\right)^5\frac{1}{5\cdot 5!} - \left(\frac{1}{2}\right)^7\frac{1}{7\cdot 7!} \underset{\text{Geogebra}}{\cong} 0{,}4931074$

Vérif Geogebra $\int$ directe $\cong$

(b) $f(x) = e^{-x^2}$

on sait que $e^x = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!} \Rightarrow e^{-x^2} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-x^2)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{n!}$

d'où $\displaystyle\int_0^1 e^{-x^2}dx = \int_0^1\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{n!}\,dx = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n!}\int_0^1 x^{2n}dx = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n!}\,\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\Big|_0^1$

$\displaystyle = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n!\,(2n+1)} = 1 - \frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{2\cdot 5} - \frac{1}{6\cdot 7} + \dots$

ou $e^x = 1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^4}{4!} + \dots \Rightarrow e^{-x^2} = 1 - x^2 + \dfrac{x^4}{2!} - \dfrac{x^6}{3!} + \dfrac{x^8}{4!} - \dots$

$\displaystyle\int_0^1 e^{-x^2}dx = \int_0^1 1 - x^2 + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^8}{4!} - \dots\,dx = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5\cdot 2!} - \frac{x^7}{7\cdot 3!} + \frac{x^9}{9\cdot 4!} - \dots\Big|_0^1$

$= 1 - \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{5\cdot 2!} - \dfrac{1}{7\cdot 3!} + \dfrac{1}{9\cdot 4!} - \dots \underset{\text{Geogebra}}{\cong} 0{,}4612813637$

Vérif GeoGebra $\int$ directe $\cong 0{,}4612810064$

(c) $f(x) = \ln(1+x^2)$

$\ln(1+x) = \displaystyle\sum_{n\geq 1}(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n} \Rightarrow \ln(1+x^2) = \sum_{n\geq 1}(-1)^{n+1}\frac{x^{2n}}{n} = x^2 - \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{3} - \frac{x^8}{4} + \dots$

$\displaystyle\int_0^{1/2} x^2 - \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{3} - \dots\,dx = \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{2\cdot 5} + \frac{x^7}{3\cdot 7} - \dots\Big|_0^{1/2} = \frac{1}{2^3\cdot 3} - \frac{1}{2^5\cdot 2\cdot 5} + \frac{1}{2^7\cdot 3\cdot 7} - \frac{1}{2^9\cdot 4\cdot 9} + \dots \underset{\text{Geogebra}}{\cong} 0{,}0388478014$

Vérif Geogebra $\cong 0{,}0388669937$
$\int$ directe

4) $\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} = 1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + \dots$

$$\Rightarrow \lim_{x \to 0} (\ln(1+x)) = \lim_{x \to 0} \left(1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + \dots\right)$$

$$= \lim_{x \to 0} 1 - \lim_{x \to 0} x + \lim_{x \to 0} \frac{x^2}{2} - \dots$$

Khan avec deux "limite d'une somme infinie = somme inf. des limites"

$$= 1 - 0 + 0 - \dots = 1$$

A.4 e irrationnel

$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^k}{k!} + \dots = P_n(x) + R_n(x), \forall x \in \mathbb{R}$

pour $x = 1$: $e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{k!} + \dots$

Supposons que $e \in \mathbb{Q} \Leftrightarrow e = p/q$ $(p, q \in \mathbb{N})$:

On a : $|R_n(x)| \leq \underset{[0;x]}{\operatorname{Max}}\, e^t \cdot \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} < e^x \cdot \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$

pour $x = 1$: $R_n(1) < \frac{e}{(n+1)!} < \frac{3}{(n+1)!}$

$$\Rightarrow \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}}_{S_n} < e = \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}}_{S_n} + R_n(1) < \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}}_{S_n} + \frac{3}{(n+1)!}$$

$$\Rightarrow S_n \cdot n! < \frac{p}{q} n! < S_n \cdot n! + 3 \frac{n!}{(n+1)!}$$

$$\Rightarrow S_n \cdot n! < \frac{p n!}{q} < S_n \cdot n! + \frac{3}{n+1}$$

Or $S_n \cdot n! \in \mathbb{N}$ et $\frac{p \cdot n!}{q} \in \mathbb{N}$ si $n \geq q$

donc, pour $n \geq q$, on aurait $k < m < k + \frac{3}{n+1}$, $k, m \in \mathbb{N}$

c'est absurde car $k + \frac{3}{n+1}$ tend vers k quand $n \to \infty$

$k + \frac{3}{n+1}$

$k \in \mathbb{N}$ $\qquad$ $k+1$

"pas de place" pour un $m \in \mathbb{N}$ tel que $k < m < k + \frac{3}{n+1}$